

2 • VOTRE PREMIER PLAN D'EXPÉRIENCES

Si vous avez lu le premier chapitre, vous en savez assez pour attaquer votre premier plan d'expériences. Nous allons suivre la démarche suivante dont les principales étapes sont :

- la préparation de l'étude,
- le choix du plan d'expériences,
- l'expérimentation,
- l'interprétation des résultats,
- l'arrêt ou la poursuite de l'étude.

Nous allons examiner ces différentes phases sur un premier exemple.

2.1 Exemple 01 : je maîtrise la consommation de ma voiture

2.1.1 Préparation du plan d'expériences

Cette étape se décompose en plusieurs parties dont les principales sont décrites dans les paragraphes suivants.

■ Définition de l'objectif de l'étude

Nous allons suivre la réalisation d'une étude que tout le monde peut mettre sur pieds. L'objectif de l'étude est de connaître la consommation d'essence d'une voiture lorsqu'on roule plus ou moins chargé et plus ou moins vite.

L'étude sera réussie si on peut répondre à des questions telles que : « Combien ma voiture consomme-t-elle : si elle est à vide ou non ? si je roule vite ou non ? si elle est chargée et si je roule vite ? »

■ Description des éléments sur lesquels va porter l'expérimentation

Je vais décrire les essais que j'ai effectués sur ma propre voiture. Je vais être le seul conducteur et j'effectuerai les essais sur une autoroute. Si j'en avais la possibilité, je ferais les essais sur un circuit automobile où il est facile de respecter la plupart des conditions imposées à l'expérimentation. Il est en effet plus facile de réaliser des essais sur un circuit, dans un laboratoire, un atelier pilote ou tout lieu spécialement conçu pour ce genre d'activité.

■ Choix de la réponse permettant d'atteindre l'objectif

La réponse sera la consommation d'essence en litres pour 100 kilomètres parcourus.

■ Recherche des facteurs qui pourraient être influents sur la réponse

Quels sont les facteurs qui peuvent modifier la consommation d'une voiture ?

Il y a bien sûr les deux facteurs que je vais étudier, la charge et la vitesse de la voiture. Mais il y en a d'autres. Par exemple, la marque et la pression de gonflage des pneumatiques, la présence ou non d'une galerie, la direction du vent, la pluie, le réglage du moteur, le nombre d'arrêts et de démarrages, la route plus ou moins accidentée. Il est prudent de noter par écrit tous les facteurs possibles. Pour remplir la liste des facteurs et essayer de ne pas en oublier, on peut aller voir son garagiste pour lui demander s'il ne connaît pas d'autres facteurs pouvant augmenter ou réduire la consommation. On a toujours intérêt à bien faire le tour du problème. On ne sera pas obligé d'étudier tous les facteurs mais on connaîtra ceux qui pourraient être influents. Les facteurs qui ne seront pas étudiés dans le plan d'expériences seront, en général, fixés à un niveau constant pendant toute l'expérimentation.

■ Définition des niveaux des facteurs

Il s'agit de choisir les niveaux haut et bas de chaque facteur.

La vitesse ne devra pas être trop faible et elle ne devra pas dépasser les limitations imposées par la sécurité. Dans notre exemple, le niveau bas sera de 80 km/h et le niveau haut de 120 km/h.

La charge à vide est définie par la présence du conducteur seul, sans aucun bagage. La surcharge est définie par le poids ajouté à la charge à vide. S'il y a 3 personnes supplémentaires et 25 kg de bagage par personne, la surcharge est d'environ $3 \times 70 = 210$ pour les passagers et $4 \times 25 = 100$ kg pour les bagages des quatre personnes à bord, soit environ 300 kg de surcharge. Au lieu de faire appel à ses voisins pour les essais, on pourra utiliser des gueuses de fonte régulièrement réparties sur les sièges et dans le coffre. Le poids total des gueuses est de 300 kg.

Le niveau bas du facteur charge sera : la voiture et le conducteur seul et sans bagage.

Le niveau haut du facteur charge sera : la voiture, le conducteur et une charge supplémentaire de 300 kg régulièrement répartie.

Il est bon de résumer ces niveaux dans un tableau (Tableau 2.1).

Tableau 2.1 – Facteurs et domaine d'étude.

Facteur	Niveau bas (–)	Niveau haut (+)
Vitesse (1)	80 km/h	120 km/h
Surcharge (2)	0	300 kg

Ce tableau est important car les conclusions de l'expérimentation ne seront valables qu'à l'intérieur de ce domaine d'étude. Si l'on charge la voiture à 400 kg et que l'on roule à 130 km/h, on ne pourra pas utiliser les conclusions de cette étude.

■ Examen des contraintes

Lorsque l'on roule, la quantité d'essence diminue. Le poids du véhicule est donc modifié au cours de l'expérimentation. Il faudra commencer chaque essai avec le réservoir plein pour que le facteur « diminution d'essence au cours de l'essai » n'ait pas trop d'influence. Cela oblige à débiter le parcours dans une station service.

Il faudra qu'il fasse le même temps pour tous les essais (température, vent, pluie). On choisira donc de faire les essais le même jour et, si possible, un jour de beau temps sans vent ni pluie. La longueur du parcours devra être compatible avec cette contrainte.

On choisira le même parcours et dans le même sens pour chaque essai pour que l'influence des côtes et des descentes soit toujours la même.

On vérifiera que les pneus sont bien gonflés à la même pression avant chaque essai. On peut ainsi faire une liste de précautions à prendre pour tenir compte des contraintes.

2.1.2 Choix du plan d'expériences

On sait qu'il y a deux facteurs à étudier. Les niveaux bas et haut de chaque facteur ont été définis. Les facteurs à conserver constants pendant l'expérimentation sont : le parcours et par conséquent le kilométrage, le sens du parcours, le point de départ, le point d'arrivée et la pression des pneus.

Ayant deux facteurs prenant chacun deux niveaux, le plus simple est de choisir un plan d'expériences factoriel complet 2^2 . La dénomination 2^2 a la signification suivante : le 2 en exposant indique le nombre de facteurs, l'autre 2 indique les nombres de niveaux des facteurs. Ce plan est bien adapté à notre problème puisqu'il correspond exactement à deux facteurs prenant chacun deux niveaux. Les points d'expériences ont pour coordonnées les niveaux bas et les niveaux hauts des facteurs.

On peut présenter ce plan de plusieurs manières qui se complètent les unes les autres. On peut d'abord dessiner le domaine d'étude dans l'espace expérimental, puis ajouter les points d'expériences en tenant compte de leurs coordonnées (Figure 2.1).

On peut aussi représenter les expériences à faire sous forme de tableaux, en utilisant soit les grandeurs habituelles ou légales (km/h et kg), soit les grandeurs codées. Avec les grandeurs légales, le tableau prend le nom de *tableau d'expérimentation* ou de *matrice d'expérimentation*. Avec les grandeurs codées, le tableau prend le nom de *plan d'expériences* ou de *matrice d'expériences*.

La première colonne de la matrice d'expérimentation est utilisée pour indiquer les noms des essais (Tableau 2.2). On peut soit les numéroter, soit leur donner un nom. La deuxième colonne est celle du premier facteur, on y indique successivement les niveaux qu'il faut donner à ce facteur. La troisième colonne est celle du deuxième facteur et on y indique également les niveaux de ce facteur. Le premier essai, essai n° 1 ou essai A, sera exécuté avec une vitesse de 80 km/h et sans surcharge. Le deuxième essai, essai n° 2 ou essai B, sera exécuté avec une vitesse de 120 km/h et sans surcharge. Le troisième essai, essai n° 3 ou essai C, sera exécuté avec une vitesse de 80 km/h et avec une surcharge de 300 kg. Enfin le quatrième essai, essai n° 4 ou essai D, sera exécuté avec une vitesse de 120 km/h et avec une surcharge de 300 kg. Ce tableau est très utile pour l'exécution des essais.

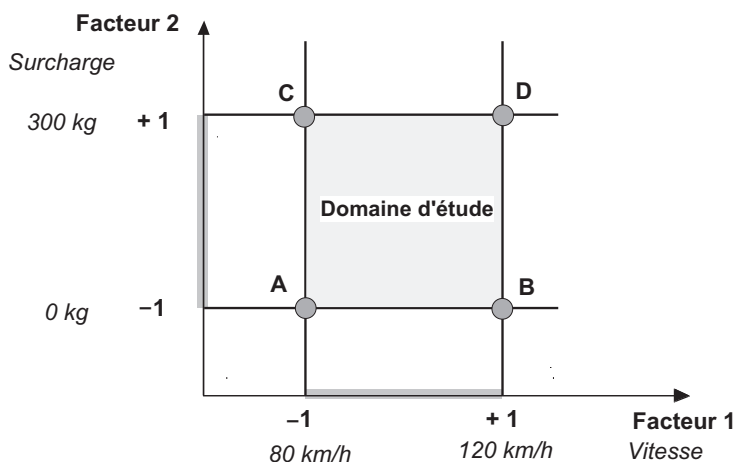


Figure 2.1 – Représentation du plan d'expérimentation.

Tableau 2.2 – Matrice d'expérimentation.

Essai n°	Vitesse Facteur 1	Surcharge Facteur 2
1 (A)	80 km/h	0 kg
2 (B)	120 km/h	0 kg
3 (C)	80 km/h	300 kg
4 (D)	120 km/h	300 kg

Tableau 2.3 – Matrice d'expériences.

Essai n°	Vitesse Facteur 1	Surcharge Facteur 2
1 (A)	-1	-1
2 (B)	+1	-1
3 (C)	-1	+1
4 (D)	+1	+1
Niveau -1	80 km/h	0 kg
Niveau +1	120 km/h	300 kg

La première colonne de la matrice d'expériences (Tableau 2.3) est utilisée de la même manière pour indiquer les noms des essais. La deuxième colonne est celle du premier facteur, on y indique successivement les niveaux qu'il faut donner à ce

facteur mais cette fois sous forme codée c'est-à-dire avec des -1 et des $+1$. La troisième colonne est celle des niveaux codés du deuxième facteur. On trouve deux lignes en bas du tableau pour indiquer la signification des niveaux -1 et $+1$ de chaque facteur. Ce tableau est utilisé lors de la construction du plan.

Pour l'interprétation des résultats d'essais, on utilise soit la matrice d'expérimentation, soit la matrice d'expériences selon les faits que l'on veut mettre en évidence.

2.1.3 Expérimentation

C'est la partie technique de l'étude. Il faut que les essais soient menés avec beaucoup de soin et il faut être sûr de la qualité des résultats. Pour le présent exemple, l'ordre des essais a peu d'importance, mais nous verrons que ce n'est pas toujours le cas. Nous étudierons au chapitre 8 les principes qui régissent le choix de l'ordre des essais. Dans le cadre de l'étude en cours, il est facile de changer la vitesse d'un essai à l'autre. En revanche, il serait maladroit de charger la voiture pour le premier essai, de la décharger pour le second et de la recharger pour le troisième ou le quatrième essai. On fera donc, en premier, les essais n° 1 et 2, puis les essais n° 3 et 4. On pourrait aussi faire d'abord les essais n° 3 et 4, puis les essais n° 1 et 2. Dans les deux cas, il n'y a qu'un seul chargement à faire.

Le parcours a été choisi et fait 120 km de long, soit 5 heures de conduite. Les temps d'arrêt à la pompe à essence, de mesure de la consommation, de la vérification de la pression des pneumatiques et de chargement de la voiture sont estimés à environ 2 heures. On pourra faire les essais en une journée.

On exécute l'essai n° 1 (80 km/h et sans surcharge) et on note la consommation d'essence. On trouve 10 litres soit une consommation de 8,3 litres aux 100 kilomètres. Le deuxième essai (120 km/h et sans surcharge) donne une consommation de 10,7 litres aux 100 kilomètres. Les deux autres essais (essais n° 3 et 4) fournissent respectivement une consommation de 9,7 et de 12,3 litres aux 100 kilomètres. Les résultats sont consignés dans une quatrième colonne de la matrice d'expérimentation ou de la matrice d'expériences (Tableau 2.4).

Tableau 2.4 – Matrice d'expériences et résultats.

N° essai	Vitesse <i>Facteur 1</i>	Surcharge <i>Facteur 2</i>	Consommation (l/100 km)
1 (A)	-1	-1	8,3
2 (B)	$+1$	-1	10,7
3 (C)	-1	$+1$	9,7
4 (D)	$+1$	$+1$	12,3
Niveau -1	80 km/h	0 kg	
Niveau $+1$	120 km/h	300 kg	

On peut reporter ces résultats sur le domaine d'étude (Figure 2.2).

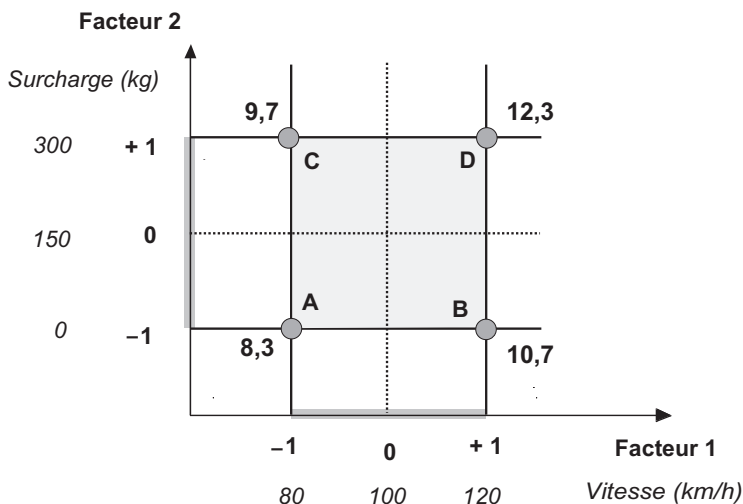


Figure 2.2 – Valeur de la réponse en divers points du domaine d'étude.

2.1.4 Signification des coefficients

Ces consommations étant mesurées, il ne semble pas facile d'en donner une interprétation simple. En effet on aimerait répondre à des questions comme : « Quelle est la consommation de ma voiture quand je la charge à 100 kg et que je roule à 90 km/h ? » ou « Quelle est la consommation supplémentaire quand je roule à 100 km/h au lieu de 80 km/h avec une surcharge de 150 kg ? » Les réponses à ces questions existent. Elles se cachent dans les résultats que nous avons enregistrés, mais pour le moment nous ne les voyons pas. Il va falloir que nous transformions nos résultats bruts pour en avoir une vision claire et précise. C'est la phase d'interprétation. Les logiciels de plans d'expériences vont maintenant prendre de l'importance car ce sont eux qui vont nous aider à réaliser toutes les transformations qui nous sont nécessaires et toutes les illustrations qui nous aideront à bien comprendre les résultats.

Le modèle postulé des plans factoriels complets 2^2 est :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 \quad \{2.1\}$$

où :

- y est la réponse, dans cet exemple, la consommation d'essence ;
- x_1 représente le niveau du facteur 1 (la vitesse), dans cet exemple 80 km/h (ou -1) et 120 km/h (ou +1) selon les essais ;
- x_2 représente le niveau du facteur 2 (la surcharge), dans cet exemple 0 kg (ou -1) et 300 kg (ou +1) selon les essais ;
- x_1x_2 est le produit des niveaux des facteurs 1 et 2 ; dans cet exemple, en unités codées, ce produit est égal à -1 ($x_1x_2 = -1 \times +1 = +1 \times -1 = -1$) ou à +1 ($x_1x_2 = -1 \times -1 = +1 \times +1 = +1$) ;

- a_0 est le coefficient constant du modèle ;
- a_1 est le coefficient du facteur 1 ;
- a_2 est le coefficient du facteur 2 ;
- a_{12} est le coefficient du terme x_1x_2 .

Ce modèle est appelé modèle *polynomial du premier degré avec interactions* ou modèle *PDAI* et nous allons examiner la signification de ses coefficients.

■ Signification du coefficient constant

Pour trouver la signification du coefficient constant a_0 , il suffit de donner la valeur 0 (unités codées) aux niveaux des deux facteurs. Le point représentatif de l'expérience correspondante est alors au centre du domaine d'étude (Figure 2.3) et la réponse en ce point a pour valeur y_0 .

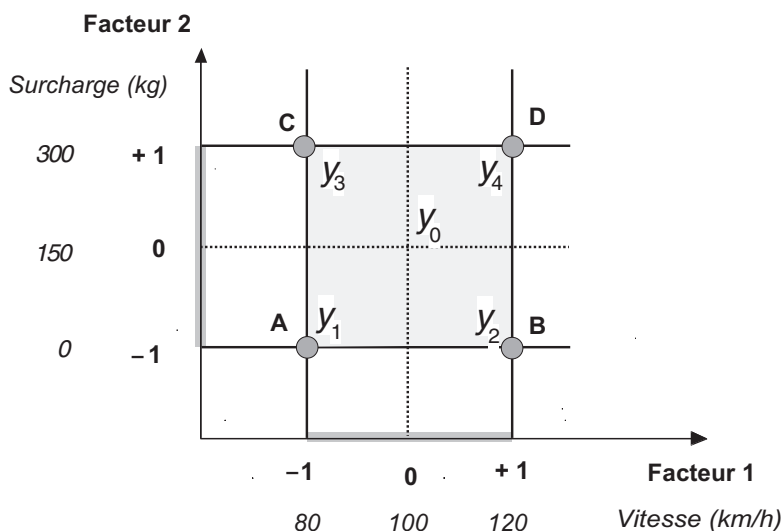


Figure 2.3 – Le coefficient constant a pour valeur la réponse au centre du domaine d'étude.

La relation {2.1} devient :

$$y = a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + a_{12} \times 0 \times 0$$

$$y_0 = a_0$$

La valeur du coefficient constant a_0 est égale à la réponse au centre du domaine d'étude.

■ Signification du coefficient du facteur 1

Considérons les deux points B et D qui se trouvent au niveau haut du facteur 1. Les coordonnées de ces points sont, en unités codées :

$$\begin{array}{c|c} \text{B} & \begin{array}{l} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \text{D} & \begin{array}{l} x_1 = +1 \\ x_2 = +1 \end{array} \end{array}$$

La réponse au point B est y_2 , réponse que l'on peut écrire en remplaçant les niveaux par leurs valeurs en unités codées :

$$y_2 = a_0 + a_1 \times (+1) + a_2 \times (-1) + a_{12} \times (+1) \times (-1) = a_0 + a_1 - a_2 - a_{12}$$

La réponse au point D est y_4 , que l'on peut écrire en remplaçant les niveaux par leurs valeurs en unités codées :

$$y_4 = a_0 + a_1 \times (+1) + a_2 \times (+1) + a_{12} \times (+1) \times (+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_{12}$$

Additionnons les deux réponses y_2 et y_4 :

$$y_2 + y_4 = 2(a_0 + a_1)$$

Faisons le même calcul pour les points A et C qui se trouvent au niveau bas du facteur 1 et où les réponses sont respectivement y_1 et y_3 . On obtient :

$$y_1 + y_3 = 2(a_0 - a_1)$$

Si on soustrait ces deux dernières relations, on a :

$$4a_1 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4$$

relation que l'on peut écrire :

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{y_2 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_3}{2} \right]$$

Or $\frac{y_2 + y_4}{2}$ est la moyenne des réponses au niveau haut du facteur 1. On nomme cette moyenne $\bar{y}_+$. Quant à l'expression $\frac{y_1 + y_3}{2}$, c'est la moyenne des réponses au niveau bas du facteur 1, soit $\bar{y}_-$. On peut écrire :

$$a_1 = \frac{1}{2} [\bar{y}_+ - \bar{y}_-]$$

Le coefficient a_1 est donc la demi-différence entre la moyenne des réponses au niveau haut du facteur 1 et la moyenne des réponses au niveau bas du même facteur 1.

Quand on passe du niveau bas au niveau haut, la réponse varie, en moyenne, comme la différence $[\bar{y}_+ - \bar{y}_-]$. Si cette différence est grande, la réponse varie beaucoup, si cette différence est faible, la réponse varie peu. On a donc là un moyen de savoir comment la réponse varie en fonction du facteur 1. C'est la raison pour laquelle on appelle le coefficient a_1 l'*effet* du facteur 1.

Application

On connaît les quatre réponses, on peut donc calculer facilement le coefficient :

$$a_1 = \frac{1}{4} [-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]$$

$$a_1 = \frac{1}{4} [-8,3 + 10,7 - 9,7 + 12,3] = 1,25$$

L'effet de la vitesse (facteur 1) est de 1,25 litre aux 100 kilomètres. Cela signifie que, si la vitesse passe de 80 à 100 km/h, la consommation augmente, en moyenne, de 1,25 litre aux 100 kilomètres. Si la vitesse passe de 80 à 120 km/h, la consommation augmente de 2,50 litres aux 100 kilomètres.

■ Représentation du coefficient du facteur 1

La moyenne des réponses au niveau haut du facteur 1, $\bar{y}_+$, est située sur la surface de réponse et se trouve à l'aplomb du point M_+ , milieu du segment BD (Figure 2.4). Il a donc pour coordonnées :

$$M_+ \left| \begin{array}{l} x_1 = +1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$$

La moyenne des réponses au niveau bas du facteur 1 est située sur la surface de réponse et se trouve à l'aplomb du point M_- , milieu du segment AC. Il a donc pour coordonnées :

$$M_- \left| \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$$

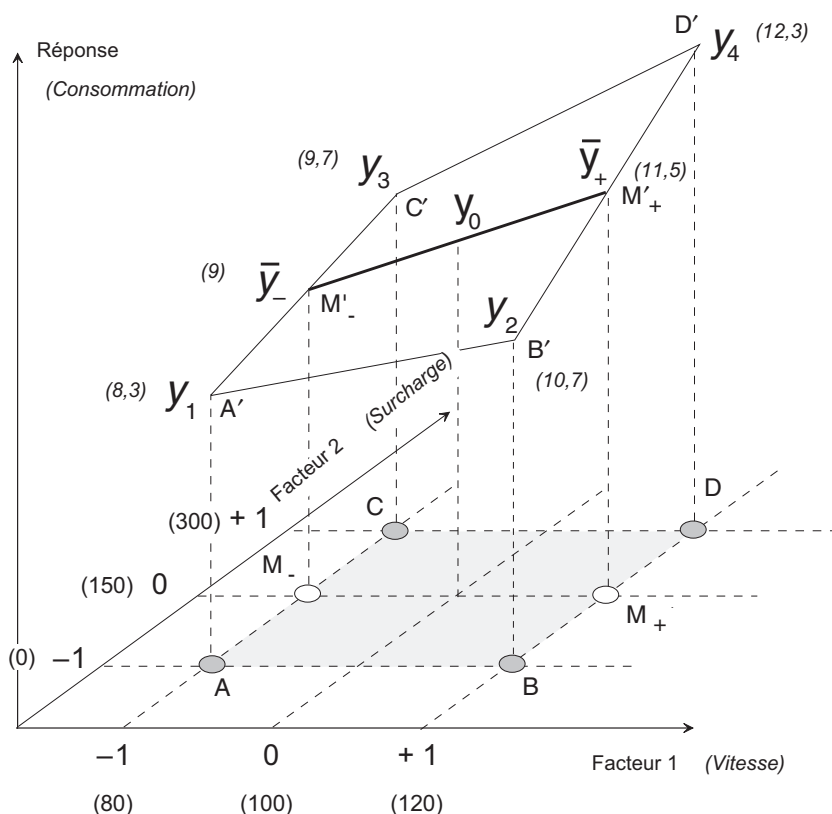


Figure 2.4 – Le coefficient du facteur 1 est la pente de la droite qui joint les deux réponses $\bar{y}_+$ et $\bar{y}_-$.

La variation de la réponse entre la moyenne des réponses au niveau haut du facteur 1, $\bar{y}_+$, et la moyenne des réponses au niveau bas de ce même facteur $\bar{y}_-$ est $\bar{y}_+ - \bar{y}_-$, c'est-à-dire deux fois le coefficient a_1 .

Le coefficient a_1 est donc égal à la variation de la réponse entre y_0 , réponse au centre du domaine d'étude, et y_+ , moyenne des réponses au niveau haut du facteur 1. On peut également regarder le coefficient a_1 comme la pente de la droite $M'_- M'_+$. On peut dire aussi que le coefficient a_1 est égal à la variation moyenne de la réponse quand le facteur 1 passe du niveau zéro au niveau haut. Il représente donc l'influence du facteur 1 dans le domaine d'étude.

■ Illustration de l'effet du facteur 1

On a l'habitude pour faire apparaître clairement la droite $M'_- M'_+$ et illustrer l'effet du facteur 1, d'extraire le plan $M_+ M_- M'_- M'_+$ de la figure 2.4. On obtient la figure 2.5 qui est beaucoup plus facile à lire.

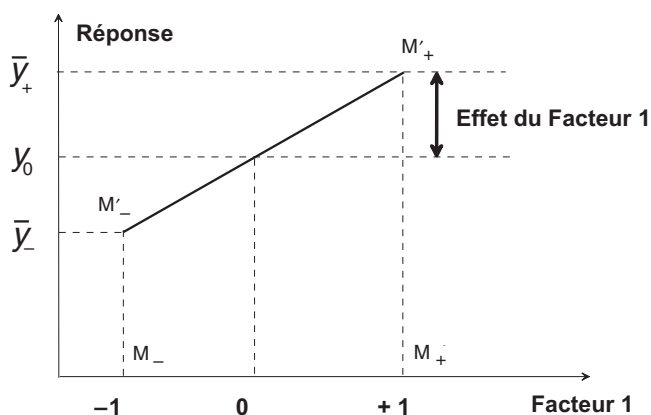


Figure 2.5 – Illustration de l'effet du facteur 1.

L'effet du facteur 1 peut être positif ou négatif suivant le signe du coefficient.

Application

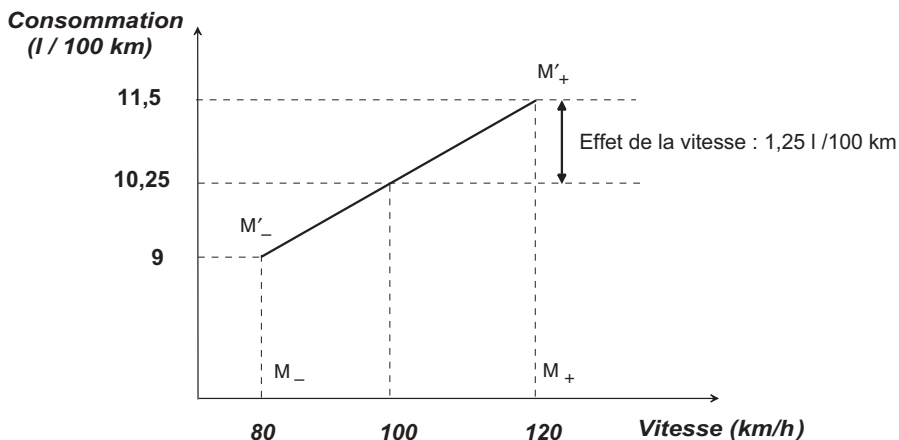


Figure 2.6 – Illustration de l'effet de la vitesse.

La moyenne des consommations au niveau haut de la vitesse (facteur 1) est :

$$\bar{y}_+ = \frac{y_2 + y_4}{2} = \frac{10,7 + 12,3}{2} = 11,5$$

La moyenne des consommations au niveau bas de la vitesse (facteur 1) est :

$$\bar{y}_- = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{8,3 + 9,7}{2} = 9$$

La consommation passe, en moyenne, de 9 à 11,5 litres aux 100 kilomètres quand la vitesse passe de 80 à 120 km/h. La consommation au centre est la moitié des deux moyennes, soit 10,25 litres aux 100 kilomètres.

La consommation passe, en moyenne, de 10,25 à 11,5 litres aux 100 kilomètres quand la vitesse passe de 100 à 120 km/h. Cette augmentation de 1,25 litre aux 100 kilomètres représente l'effet du facteur « vitesse » (Figure 2.6).

■ Signification du coefficient du facteur 2

De la même manière, on montre que le coefficient a_2 est égal à la variation moyenne de la réponse quand le facteur 2 passe du niveau zéro au niveau haut. Il représente l'influence du facteur 2 dans le domaine d'étude. On l'appelle « effet du facteur 2 ».

D'une manière générale, quand le modèle choisi est un polynôme, les coefficients des termes du premier degré sont les effets des facteurs.

Application

On connaît les quatre réponses, on peut donc calculer facilement le coefficient a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{4}[-y_1 - y_2 + y_3 + y_4]$$

$$a_2 = \frac{1}{4}[-8,3 - 10,7 + 9,7 + 12,3] = 0,75$$

L'effet de la surcharge (facteur 2) est de 0,75 l aux 100 km. Cela signifie que, si la surcharge passe de 0 à 150 kg, la consommation augmente en moyenne de 0,75 l aux 100 km. Si la surcharge passe de 0 à 300 kg la consommation augmente de 1,50 l aux 100 km.

Consommation
(l / 100 km)

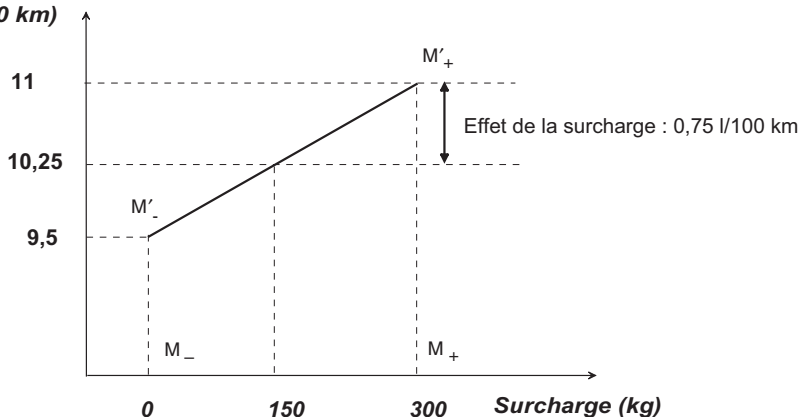


Figure 2.7 – Illustration de l'effet de la surcharge.

La moyenne des consommations au niveau haut de la surcharge (facteur 2) est :

$$\bar{y}_+ = \frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{9,7 + 12,3}{2} = 11$$

La moyenne des consommations au niveau bas de la surcharge (facteur 2) est :

$$\bar{y}_- = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{8,3 + 10,7}{2} = 9,5$$

La consommation passe, en moyenne, de 9,5 à 11 l aux 100 km quand la surcharge passe de 0 à 300 kg. La consommation au centre est la moitié des deux moyennes, soit 10,25 l aux 100 km.

La consommation passe, en moyenne, de 10,25 à 11 l aux 100 km quand la surcharge passe de 150 à 300 kg. Cette augmentation de 0,75 l aux 100 km est l'effet du facteur surcharge (Figure 2.7).

■ Signification du coefficient a_{12}

On peut calculer le coefficient a_{12} par une méthode analogue à celle qui a été utilisée pour les coefficients a_1 et a_2 . On trouve que le coefficient a_{12} est égal à :

$$a_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{y_4 - y_3}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2} \right]$$

Or $\frac{y_4 - y_3}{2}$ est l'effet du facteur 1 lorsque le facteur 2 est au niveau haut. C'est la moitié de la variation de la réponse entre y_4 et y_3 . Cet effet est illustré par la pente de la droite C'D' (Figure 2.4 et Figure 2.8).

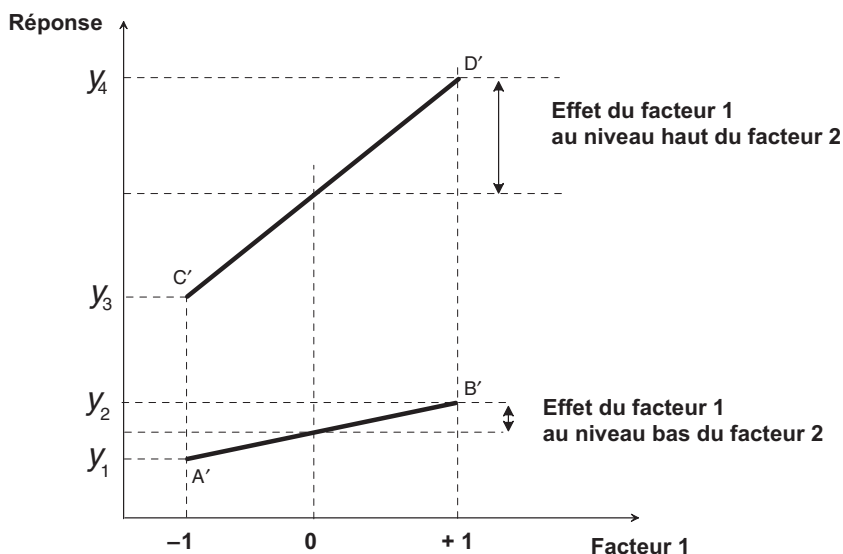


Figure 2.8 – Illustration d'une interaction entre deux facteurs.

L'expression $\frac{y_2 - y_1}{2}$ est l'effet du facteur 1 lorsque le facteur 2 est au niveau bas. C'est la moitié de la variation de la réponse entre y_2 et y_1 . Cet effet est illustré par la pente de la droite A'B' (Figure 2.8).

Le coefficient a_{12} est la moitié de la différence entre ces deux effets.

Le coefficient a_{12} mesure donc la variation de l'effet du facteur 1 quand le niveau du facteur 2 est modifié. On peut aussi montrer que le même coefficient a_{12} mesure également la variation de l'effet du facteur 2 quand le niveau du facteur 1 est, lui aussi, modifié.

Le coefficient a_{12} est appelé l'*interaction* entre les facteurs 1 et 2.

On peut illustrer une interaction entre deux facteurs en extrayant de la figure 2.4 les plans ABA'B' (niveau bas du facteur 2), et CDC'D' (niveau haut du facteur 2) et en projetant ces plans sur un même plan (Figure 2.8).

S'il n'y a pas d'interaction entre deux facteurs, les pentes des droites A'B' et C'D' sont les mêmes.

S'il y a interaction entre deux facteurs, les pentes des deux droites précédentes ne sont pas les mêmes. L'interaction est d'autant plus forte que les pentes sont différentes.

Application

On peut donc calculer l'interaction avec la relation :

$$a_{12} = \frac{1}{4}[+y_1 - y_2 - y_3 + y_4]$$

$$a_{12} = \frac{1}{4}[+8,3 - 10,7 - 9,7 + 12,3] = 0,05$$

L'interaction entre les facteurs 1 et 2 est de 0,05 l aux 100 km. Cela signifie que l'effet de la vitesse est un peu plus élevé quand on se trouve en surcharge. Quand la vitesse est de 80 km/h, l'effet de la surcharge est de 0,7 l aux 100 km. Quand la vitesse est de 120 km/h, l'effet de la surcharge est de 0,8 l aux 100 km.

Cela signifie aussi que l'effet de la surcharge est plus important quand on roule vite. Quand il n'y a pas de surcharge, l'effet de la vitesse est de 1,2 l aux 100 km. Quand la surcharge est de 300 kg, l'effet de la vitesse est de 1,3 l aux 100 km (Figure 2.9).

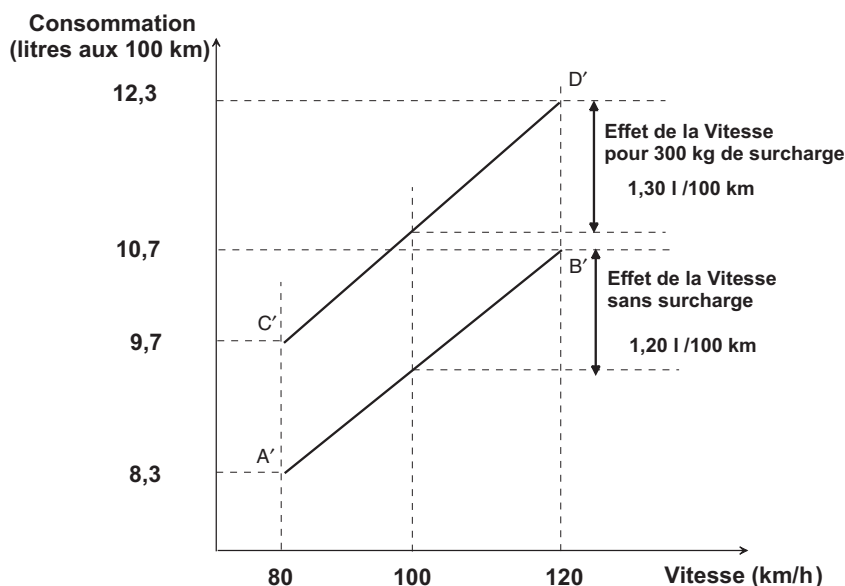


Figure 2.9 – Illustration de l'interaction entre la vitesse et la surcharge.
Cette interaction est très faible puisque les deux droites ont presque la même pente.

2.1.5 Interprétation des résultats des calculs

On connaît maintenant, les valeurs :

- du coefficient constant : $a_0 = 10,25$;
- du coefficient du facteur 1 (vitesse) : $a_1 = 1,25$;
- du coefficient du facteur 2 (surcharge) : $a_2 = 0,75$;
- de l'interaction a_{12} entre la vitesse et la surcharge : $a_{12} = 0,05$.

On peut reporter ces valeurs dans la relation {2.1} du modèle postulé :

$$y = 10,25 + 1,25 x_1 + 0,75 x_2 + 0,05 x_1 x_2 \quad \{2.2\}$$

On comprend qu'avec ce modèle, on puisse calculer toutes les réponses dans le domaine d'étude. Il suffit d'attribuer des valeurs aux niveaux x_1 et x_2 pour obtenir immédiatement la consommation. Le modèle étant en unités centrées réduites, il faut faire les calculs dans ces unités et transformer ensuite les résultats obtenus en unités légales. Si l'on veut utiliser les unités légales directement, il faut transformer la relation {2.2}. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la relation {1.1} :

$$x = \frac{A - A_0}{Pas}$$

Facteur 1 (vitesse) :

$$x_1 = \frac{A_1 - A_0}{Pas_1} = \frac{A_1 - 100}{20}$$

Facteur 2 (surcharge) :

$$x_2 = \frac{A_2 - A_0}{Pas_2} = \frac{A_2 - 150}{150}$$

$$y = 10,25 + 1,25 \left(\frac{A_1 - 100}{20} \right) + 0,75 \left(\frac{A_2 - 150}{150} \right) + 0,05 \left(\frac{A_1 - 100}{20} \right) \left(\frac{A_2 - 150}{150} \right)$$

$$y = 10,25 - \frac{125}{20} - 0,75 + \frac{1,25 A_1}{20} + \frac{0,75 A_2}{150} + \left(\frac{0,05 A_1}{20} - \frac{5}{20} \right) \left(\frac{A_2}{150} - 1 \right)$$

$$y = 3,25 + \frac{5}{20} + \left[\frac{1,25}{20} - \frac{0,05}{20} \right] A_1 + \left[\frac{0,75}{150} - \frac{5}{20 \times 150} \right] A_2 + \frac{0,05 A_1}{20} \frac{A_2}{150}$$

D'où la relation en unités légales :

$$y = 3,5 + 0,06 A_1 + 0,0033 A_2 + 0,0000167 A_1 A_2 \quad \{2.3\}$$

On peut donc répondre facilement aux questions du début du paragraphe 5 en utilisant soit la relation {2.2} soit la relation {2.3}.

Application

La question était : « Quelle est la consommation de ma voiture quand je la charge à 100 kg et que je roule à 90 km/h ? » Appliquons la relation {2.3} :

$$\begin{aligned} y &= 3,5 + 0,06 \times 90 + 0,0033 \times 100 + 0,0000167 \times 90 \times 100 \\ y &= 3,5 + 5,4 + 0,333 + 0,150 = 9,383 \end{aligned}$$

La réponse est : Si je roule à 90 km/h avec une surcharge de 100 kg, je consommerai 9,38 l aux 100 km.

Application

La question était : « Quelle est la consommation supplémentaire quand je roule à 100 km/h au lieu de 80 km/h avec une surcharge de 150 kg ? » Commençons par transformer les unités légales en unités codées :

80 km/h = niveau -1

100 km/h = niveau 0

150 kg = niveau 0

et appliquons la relation {2.2} :

$$y = 10,25 + 1,25 \times (-1) + 0,75 \times (0) + 0,05(-1 \times 0) \\ y = 10,25 - 1,25 = 9$$

Quand je roule au niveau -1 (80 km/h) avec une surcharge au niveau 0 (150 kg), je consomme 9 litres de carburant aux 100 kilomètres.

$$y = 10,25 + 1,25 \times (0) + 0,75 \times (0) + 0,05(0 \times 0) \\ y = 10,25$$

Quand je roule au niveau 0 (100 km/h) avec une surcharge au niveau 0 (150 kg), je consomme 10,25 litres de carburant aux 100 kilomètres.

La réponse est donc : avec une surcharge de 150 kg, la consommation augmente de 1,25 l aux 100 km quand je passe de 80 à 100 km/h.

Il est donc possible de répondre aux questions posées ainsi qu'à beaucoup d'autres faisant intervenir la vitesse et la charge. Mais ne trouvez-vous pas que ces calculs sont fastidieux, qu'ils ne sont guère enrichissants et que notre esprit pourrait être utilisé à des tâches plus productives ? C'est pourquoi nous vous conseillons d'utiliser un logiciel de plan d'expériences. Tous les calculs que nous avons vus, et beaucoup d'autres, sont réalisés avec facilité et rapidité. Les logiciels permettent aussi de tracer des graphiques faisant ressortir les principales caractéristiques de l'étude. Ils multiplient la puissance de raisonnement de l'expérimentateur et réalisent des calculs impossibles à faire à la main. En effet, dès que le nombre de facteurs augmente, les calculs se compliquent et l'utilisation d'un logiciel facilite considérablement la tâche de l'expérimentateur.

À titre d'exemple les deux diagrammes suivants montrent la puissance des logiciels. Le premier diagramme (Figure 2.10) indique l'effet des deux facteurs, vitesse et surcharge, ainsi que la valeur correspondante de la réponse. Ce diagramme est interactif, on peut choisir les niveaux que l'on veut dans tout le domaine d'étude. Pour chaque couple de niveaux, on obtient la valeur de la réponse. On peut donc facilement répondre à la première question sans être obligé de faire le détail des calculs. Ce même diagramme permet aussi de répondre à la deuxième question.

Le deuxième diagramme (Figure 2.11) indique les courbes isoréponses dans le domaine d'étude. Par exemple, la courbe 10 indique toutes les combinaisons de vitesse et de surcharge qui engendrent une consommation de 10 l de carburant aux 100 km. Si l'on ne veut pas dépasser une consommation de 11 l aux 100 km, on voit comment il faut adapter sa vitesse en fonction de la surcharge. Par exemple si la surcharge est de 200 kg, il ne faudra pas dépasser 107,9 km/h.

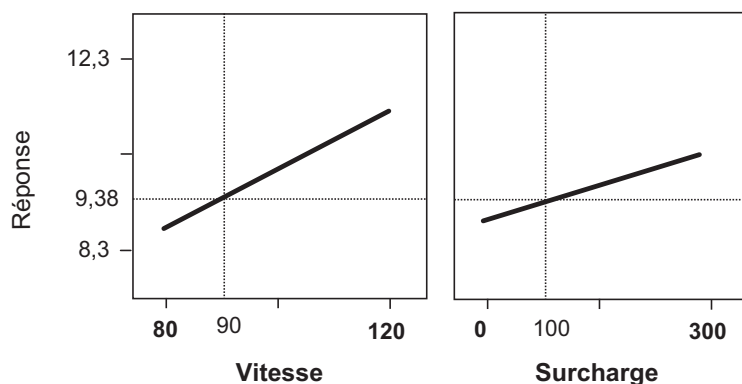


Figure 2.10 – Valeur de la réponse en divers points du domaine d'étude.

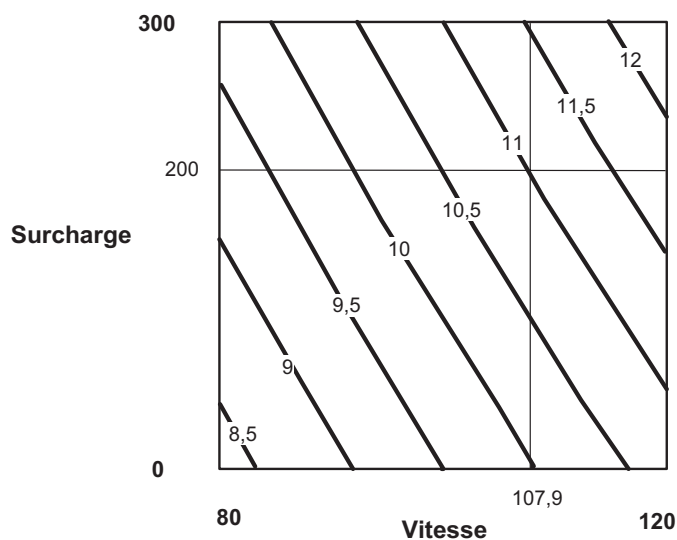


Figure 2.11 – Avec une surcharge de 200 kg on limitera la vitesse à 107,9 km/h pour ne pas consommer plus de 11 l aux 100 km.

Si vous voulez réaliser vous-même ces calculs et ces graphiques, consultez le chapitre 14 où vous trouverez les explications détaillées pour mener à bien ces opérations. Vous pouvez aussi consulter le site <http://www.plansdexpériences.com> consacré aux exemples de ce livre.